

1) $x \in \mathbb{N}$ tq $x \equiv 0[7]$ et $x \equiv 0[3]$.

$$x = 7k = 3k' \quad \text{pour } k, k' \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{or } 7 \nmid 3, \text{ donc } 7 \mid k'$$

$$\text{or } k' = 7l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Donc } x = 3 \times k' = 3 \times 7l = 21l, \quad l \in \mathbb{Z},$$

$$\text{or } x \equiv 0[21].$$

2) Contre-exemple: si $x \equiv 0[2]$ et $x \equiv 0[6]$, $x \not\equiv 0[12]$

Pour exemple pour $x = 18$

$$x = 2 \times 9 \equiv 0[2]$$

$$x = 6 \times 3 \equiv 0[6]$$

$$\text{mais } 12 \nmid 18$$

$$\frac{18}{12} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

~~→~~

Ex 07.10 Soient $a, b \in \mathbb{N}^2$ tq $a^2 = b^3$ enun d'énoncé $a^2 = b^3$
 $d = \text{pgcd}(a, b)$, u et v tq $a = du$, $b = dv$.

1.a) On $u^2 = dv^3$

$$a^2 = b^3 \Rightarrow (du)^2 = (dv)^3 \Rightarrow d^2 u^2 = d^3 v^3 \Rightarrow u^2 = dv^3$$

1.b) On a $u^2 = (dv^3) \times v$, donc $v \mid u^2$, or $v \nmid u$, or v premier avec u , donc $v \mid u$ (th. Gauss) $\frac{u^2}{v} = dv^3$

Comme u et v premiers entre eux, $v=1$

(*) d'après le pt caractéristique (Pr 3.5) $\text{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

2) $v=1$, donc $b=d$.

$$a^2 = b^3 \Rightarrow (du)^2 = d^3 \Rightarrow u^2 = d$$

Donc $a = d \times u = u^2 \times u = u^3$ et $b = u^2$.

$$a = u^3; b = u^2 \quad \checkmark$$

• Réciproquement, si $a = u^3$ et $b = u^2$

$$a^2 = u^6; b^3 = u^6, \text{ donc } a^2 = b^3.$$

EQUATIONS DIOPHANTIENNES

Ex 07.11 $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ Résoudre $x^2 + y = 102$

$$x^2 + y = 102$$

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 2} \\ 51 \overline{) 3} \\ 12 \overline{) 17} \\ 1 \end{array}$$

on $y(x^2 + 1) = 102$, où les diviseurs de 102 sont 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102

Si d diviseur de 102, $d-1$ doit être une carré (x^2)

Candidates possibles: $d=1, x=0, y=102$

$d=2, x=1, y=51$

$d=17, x=4, y=6$

$$S = \{(0, 102); (1, 51); (4, 6)\}$$

Mode générale de résolution des équations Diophantiennes du type $ax+by=c$ (E)

①. Simplifier (E) au maximum, en divisant par $\text{pgcd}(a,b,c)$.

On obtient (E'): $a'x+b'y=c'$ avec a' et b' premiers entre eux.*

(* Si d/a' et d/b' , alors $d/a'x+b'y$, donc d/c' , sinon l'équation n'a pas de sol^o)

②. Déterminer une solution particulière de (E') en utilisant l'algorithme d'Euclide pour trouver une $\text{pgcd}(a',b')$ comme combinaison lin. de a' et b' . (Cf exercice 136 p 467)

③. L'axe d'égalité vérifiée par la sol^o part. de (E'), et le reste $c'(E')$.

④. Le th. de Gauss donne alors tous les solutions.

Exemple: $630x + 1080y = 20$

①. (E') $315x + 540y = 10$

②.
$$\begin{array}{r|l} 540 & 315 \\ -315 & \\ \hline 225 & 1 \end{array}$$

$540 = 315 \times 1 + 225$

$315 = 225 \times 1 + 90$

$$\begin{array}{r|l} 225 & 90 \\ -90 & \\ \hline 135 & 2 \end{array}$$

$225 = 2 \times 90 + 45$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 45 \\ -45 & \\ \hline 45 & 1 \end{array}$$

$90 = 45 \times 1 + 45$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 29 \\ -29 & \\ \hline 16 & 1 \end{array}$$

$45 = 29 \times 1 + 16$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 16 \\ -16 & \\ \hline 13 & 1 \end{array}$$

$29 = 16 \times 1 + 13$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 13 \\ -13 & \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$16 = 13 \times 1 + 3$

On a:
 $540 = 315 \times 1 + 225$
 $315 = 225 \times 1 + 90$
 $225 = 2 \times 90 + 45$
 $90 = 45 \times 1 + 45$
 $45 = 29 \times 1 + 16$
 $29 = 16 \times 1 + 13$
 $16 = 13 \times 1 + 3$
 $13 = 3 \times 4 + 1$

On "remonte" ces égalités:

$1 = 29 - 16$
 $1 = 29 - (90 - 29) = 29 - 90 + 29 = -90 + 2 \times 29$
 $1 = -90 + 2 \times (225 - 2 \times 90) = 2 \times 225 - 5 \times 90$
 $1 = 2 \times 225 - 5 \times (315 - 225) = -3 \times 315 + 7 \times 225$
 $1 = -3 \times 315 + 7 \times (540 - 315) = 8 \times 540 - 11 \times 315$

$$\text{pgcd}(315, 540) = 45 = 19 \times 315 - 11 \times 540$$

on a bien $\text{pgcd}(315, 540) = 45$

En multipliant par 10, on obtient une solution particulière de (E') :

$$315 \times \underline{190} + 546 \times \underline{(-110)} = \underline{10}$$

$$S_0 = (190; -110).$$

$$(E_0) \quad 315 \times 190 + 546 \times (-110) = 10$$

$$(E') \quad 315 \times x + 546 \times y = 10$$

on soustrait mème à mème

$$315(190 - x) + 546(-110 - y) = 0$$

on obtient une opération sans 2^d mème.

$$(4) \quad \text{Ainsi, } 315(190 - x) = 546(110 + y). \quad (E^*)$$

↑
premiers entre eux.

Donc, d'après le th. de Gauss, $546 \mid (190 - x)$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 190 - x = 546k$$

$$(x = 190 - 546k.)$$

$$\text{Dans } (E^*), \text{ il vient: } 315 \times 546k = 546 \times 110 + 546y$$

$$y = -110 + 315k$$

$$\text{Finalement, } S = \left\{ \left(\underbrace{190 - 546k}_x ; \underbrace{-110 + 315k}_y \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On a $315 \times \underline{19} + 546 \times \underline{(-11)} = 1$

En multipliant par 10, on obtient une solution particulière de (E') :

$$315 \times \underline{190} + 546 \times \underline{(-110)} = \underline{10}$$

$$J_0 = (190; -110).$$

③. $(E_0) \quad 315 \times 190 + 546 \times (-110) = 10$

$(E') \quad 315 \times x + 546 \times y = 10$

on soustrait m_{100} à m_{100}

$$315(190 - x) + 546(-110 - y) = 0$$

on obtient une opération dans 2^{d} colonne.

④. Ainsi, $315(190 - x) = 546(110 + y). \quad (E^*)$

↑
premiers entre eux.

Donc, d'après le th. de Gauss, $546 \mid (190 - x)$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 190 - x = 546k$$

$$(x = 190 - 546k.)$$

Dans (E^*) , il vient: $315 \times 546k = 546 \times 110 + 546y$

$$y = -110 + 315k$$

Enfinement, $S = \left\{ \underbrace{(190 - 546k)}_x ; \underbrace{-110 + 315k}_y \right\} \mid k \in \mathbb{Z} \}.$

Note :

20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

Equations diophantiennes

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

Q07.12

$$5x + 6y = 1$$

$$1^{\circ}) \begin{array}{r|l} 5 & 6 \\ -6 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ -5 & 6 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

$$5 = 6 \times 1 + 1 \quad (6 = 1 \times 6)$$

$$5 - 6 = 1$$

Le couple $(1, -1)$ convient (on peut le deviner)

$$2^{\circ}) (E) \quad 5x + 6y = 1$$

$$(E') \quad 5 \times 1 + 6 \times (-1) = 1$$

On rajoute membre à membre

$$5(x-1) + 6(y+1) = 0$$

$$x \quad 5(x-1) = -6(y+1) \quad (*)$$

$$3^{\circ}) \text{ dans } (*), \quad 5 \nmid 6(y+1)$$

Or (th. de Gauss) 5 est premier avec 6, donc $5 \mid (y+1)$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : y+1 = 5k$$

$$y = 5k - 1$$

$$\text{Dans } (*): \quad 5(x-1) = -6 \times 5k$$

$$(x-1) = -6k$$

$$x = -6k + 1$$

$$S = \left\{ \underbrace{(-6k+1)}_x, \underbrace{5k-1}_y \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

N°

.../...

Q07-13 $35a + 8b = 4$ dans $\mathbb{Z}^2$

$35 = 7 \times 5$; $8 = 2^3$; $4 = 2^2$, l'équation ne se simplifie pas.

1°)
$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ -32 & 4 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$(35 = 6 \times 8) + 3 \quad 8 = 3 \times 2 + 2 \quad 3 = 2 \times 1 + 1 \quad 2 = 2 \times 1 + 0$

On a $\text{pgcd}(35, 8) = 1$,
on cherche d'abord une solution de l'équation $35a + 8b = 1$

$$\begin{aligned} 35 &= 6 \times 8 + 3 & 2 &= 8 - 3 \times 2 & 1 &= 3 - 2 \\ 3 &= 35 - 6 \times 8 & &= 8 - (35 - 6 \times 8) \times 2 & 1 &= (35 - 6 \times 8) - (35 \times 2 + 9 \times 8) \\ & & &= 8 - 35 \times 2 + 9 \times 8 & 1 &= 35 \times 3 + 8 \times (-13) \\ & & &= -35 \times 2 + 9 \times 8 & & \end{aligned}$$

On a donc $35 \times 3 + 8 \times (-13) = 1$

En multipliant par 4 membre à membre

$35 \times 12 + 8 \times (-52) = 4$

Donc $(12; -52)$ est une solution particulière

2°) (E) $35a + 8b = 4$

(E') $35 \times 12 + 8 \times (-52) = 4$

(E) - (E') $35(a - 12) + 8(b + 52) = 0 \quad (*)$

Donc $35 \mid 8(b + 52)$; or 35 et 8 premiers entre eux.

Donc (th. Gauss) $35 \mid b + 52$

$\exists k \in \mathbb{Z} \quad b + 52 = 35k$

$b = 35k - 52$

Dans (*): $35(a - 12) + 8(35k - 52 + 52) = 0$

$a - 12 + 8k = 0$

$a = -8k + 12$

$$S = \left\{ \underbrace{-8k + 12}_a ; \underbrace{35k - 52}_b , k \in \mathbb{Z} \right\}$$